Mértani sorozat összegképlete

Tétel. *Legyen egy mértani sorozat első eleme a_1, hányadosa q, és $(q-1) \neq 0$. Ekkor az első n elem összege:* $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

Bizonyítás. A mértani sorozat n-edik tagja: $a_n = a_1 q^{n-1}$

Írjuk fel az első n tag összegét tagonként.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$

Majd felhasználva az n-edik tag képletét:

(1) $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$

Szorozzuk be mindkét oldalt q-val.

(2) $qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$

Vonjuk ki (2)-ből (1)-et. Ekkor (1)-ből az első tag, (2)-ből az utolsó tag kivételével minden tag kiesik. Így:

$qS_n - S_n = a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n - (a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}) =$
$a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n - a_1 - a_1 q - a_1 q^2 - ... - a_1 q^{n-2} - a_1 q^{n-1} = a_1 q^n - a_1$

Kiemelés után:

$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$

Mivel $(q-1) \neq 0$, ezért leosztunk vele:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

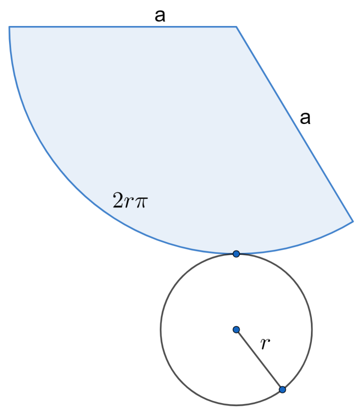
Ha $q = 1$, akkor a mértani sorozat állandó tagú, azaz minden k-ra $a_k = a_1$ (minden k pozitív egészre). Ebben az esetben $S_n = n \cdot a_1$.

$\square$

Forgáskúp felszíne

Tétel. *Legyen a forgáskúp alkotója a, alapkörének sugara r. Ekkor a forgáskúp felszíne:*
$A = r \cdot \pi \cdot (r + a)$

Bizonyítás. Az egyenes körkúp palástja kiteríthető körcikké. Ennek sugara megegyezik a kúp alkotójának hosszával (a).



A körcikk α középponti szöge arányegyenlettel számítható:

A középponti szög úgy aránylik a teljesszöghöz, mint az alapkör kerülete ($K = 2\pi r$) az a sugarú kör teljes kerületéhez ($2\pi a$), azaz $\frac{\alpha}{360°} = \frac{2\pi r}{2\pi a} = \frac{r}{a}$

Innen a kúppalást felszíne a körcikk területképletéből adódóan:

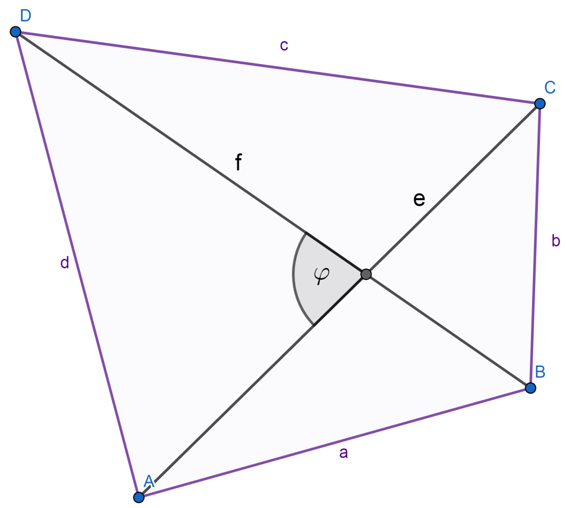
$A_p = \frac{\alpha}{360°} \cdot a^2 \cdot \pi = \frac{r}{a} \cdot a^2 \cdot \pi = r \cdot a \cdot \pi$

A forgáskúp felszíne:

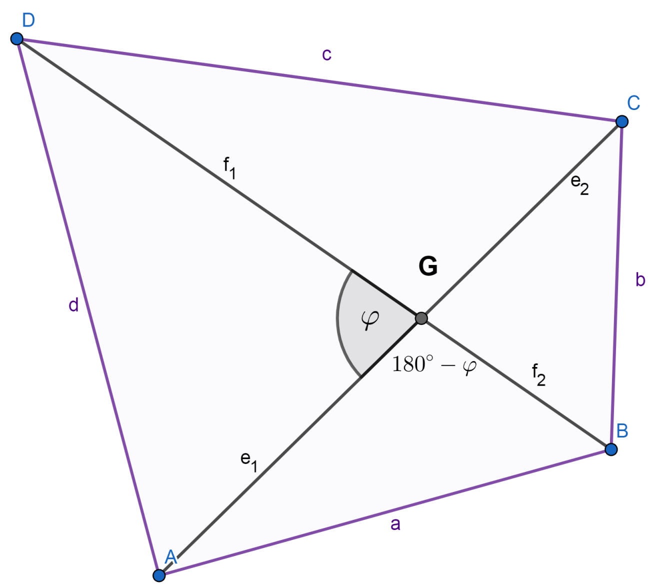
$A = r \cdot a \cdot \pi + r^2 \cdot \pi = r\pi(r + a)$. □

Konvex négyszög területe

Tétel. *Egy ABCD konvex négyszög területe egyenlő az átlók és a közbezárt szög szinusza szorzatának felével. Azaz,* $T = \dfrac{e \cdot f \sin\varphi}{2}$



Bizonyítás. Az $ABCD$ négyszöget az e, f átlók négy háromszögre bontják. Legyen az átlók metszéspontja a G pont. És legyen a $DGA = \varphi$. Ekkor AGB szög DGA szög külső szöge, tehát $AGB = 180° - \varphi$. Tudjuk, hogy $DGA = BGC$ mert csúcsszögek, ugyancsak $DGC = AGB$ mert szintén csúcsszögek.



A továbbiakban kihasználjuk, hogy ha egy síkidomot feldarabolunk, akkor a részek területének az összege egyenlő az eredeti síkidom területével. Írjuk fel ezen háromszögek területeit a trigonometrikus területképlettel.

$T_{ABCD} = T_{AGD} + T_{DGC} + T_{CGB} + T_{BGA} = \dfrac{e_1 \cdot f_1 \cdot \sin\varphi}{2} + \dfrac{f_1 \cdot e_2 \cdot \sin(180° - \varphi)}{2} + \dfrac{e_2 \cdot f_2 \cdot \sin\varphi}{2} + \dfrac{f_2 \cdot e_1 \cdot \sin(180° - \varphi)}{2}$

Mivel minden α szögre $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ ezért a fenti egyenlőség tovább alakítható.

$\dfrac{e_1 \cdot f_1 \cdot \sin\varphi}{2} + \dfrac{f_1 \cdot e_2 \cdot \sin(180° - \varphi)}{2} + \dfrac{e_2 \cdot f_2 \cdot \sin\varphi}{2} + \dfrac{f_2 \cdot e_1 \cdot \sin(180° - \varphi)}{2} = \dfrac{\sin\varphi}{2} \cdot (e_1 f_1 + f_1 e_2 + e_2 f_2 + f_2 e_1) = \dfrac{\sin\varphi}{2} [e_1(f_1 + f_2) + e_2(f_1 + f_2)] = \dfrac{\sin\varphi}{2} \cdot (f_1 + f_2)(e_1 + e_2) = \dfrac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$.

$\square$

De-Morgan azonosságok

Definíció. *Azokat a kijelentő mondatokat, amelyekről egyértelműen eldönthetjük, hogy igazak, vagy hamisak, kijelentéseknek vagy másképp állításoknak mondjuk. Minden kijelentéshez tehát egyértelműen hozzárendelhető az "igaz", vagy "hamis" logikai érték.*

Definíció. *Logikai műveletek.*

Tagadás: Az A állítás tagadása pontosan akkor igaz, ha A hamis.

Jele: $\neg A$.

Diszjunkció: az A vagy B állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás közül legalább az egyik igaz.

Jele: $A \vee B$.

Konjunkció: az A és B állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás is igaz.

Jele: $A \wedge B$.

Tétel. *Legyen A és B állítások.*

Ekkor (1) $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.

És (2) $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$.

Bizonyítás. Igazságtáblázattal. Legyenek A és B állítások.

(1)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
i	i	h	h	i	h	h
i	h	h	i	h	i	i
h	i	i	h	h	i	i
h	h	i	i	h	i	i

Mivel a táblázat utolsó két oszlopának minden sorában ugyanaz az érték áll, így a két állítás ekvivalens.

(2)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
i	i	h	h	i	h	h
i	h	h	i	i	h	h
h	i	i	h	i	h	h
h	h	i	i	h	i	i

Mivel a táblázat utolsó két oszlopának minden sorában ugyanaz az érték áll, így a két állítás ekvivalens.

$\square$