Binomiális tétel

Tétel. *Ha a és b tetszőleges valós számok és n pozitív egész szám, akkor:*
$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + ... + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$
A tételben szereplő együtthatókat binomiális együtthatóknak nevezzük.

Bizonyítás. Tekintsük a hatvány szorzat alakját.
$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot ... \cdot(a+b)\cdot(a+b)}_{\text{n db}}.$

A szorzás elvégzése során minden lépésben ki kell választani k tényezőből az a tagot, és a maradék $(n-k)$ tényezőből a b tagot, és ezeket össze kell szorozni, így a szorzat $a^k b^{n-k}$ lesz. Hányszor szerepel ez a tag? Ez a tag annyiszor szerepel, ahányszor az n számú a közül k számú a-t választunk és ez éppen $\binom{n}{k}$. Ha minden lehetséges $0 \leq k \leq n$ esetben így járunk el, a tagokat kiírva:

$(a+b)\cdot(a+b)\cdot...\cdot(a+b)\cdot(a+b) = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + ... + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$-t kapjuk. □

Példák.

A binomiális tétel segítségével végezzük el a köbre emelést.
$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^{3-1}b^1 + \binom{3}{2}a^{3-2}b^2 + \binom{3}{3}b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

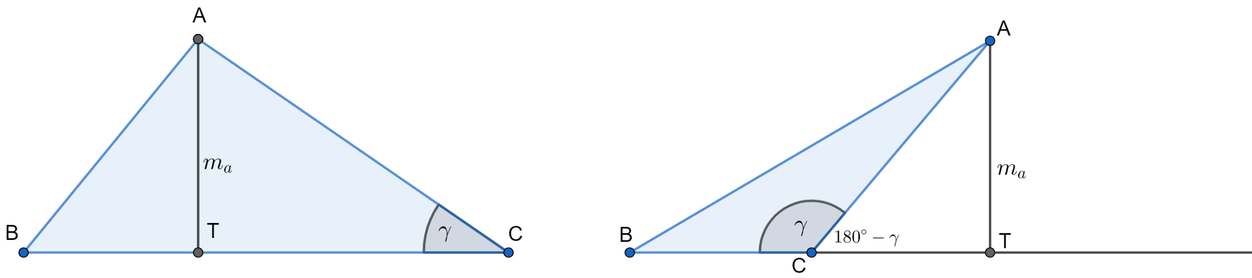
Szinusz tétel

Tétel. *Háromszög területe két oldalból és a közbezárt szög ismertében:* $T = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$

Bizonyítás. Legyen adott ABC háromszög két oldala, a és b, valamint az általuk közbezárt γ szög. Két esetet vizsgáljunk:

1. γ hegyeszög.

2. γ tompaszög.



A háromszög területét a szokásos $T = \dfrac{a \cdot m_a}{2}$ képlet szerint számítjuk.

Most itt adott az a oldal, de nem ismert az m_a magasság. Adott viszont a b oldal.

Az ACT derékszögű háromszögben $\sin\gamma = \dfrac{m_a}{b}$.

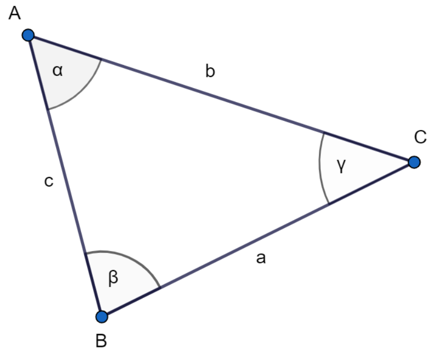
Átrendezve: $m_a = b \cdot \sin\gamma$. Ezt behelyettesítve a területképletbe kapjuk, hogy

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}.$$

Mivel $\sin\gamma = \sin(180° - \gamma)$, ezért ez az összefüggés független attól, hogy a γ szög hegyes, vagy tompaszögű.

□

Tétel. *Bármely háromszögben az oldalak aránya megegyezik a velük szemközti szögek szinuszának arányával.* $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$



Bizonyítás. Írjuk fel a háromszög területét a trigonometrikus területképlettel kétszer.

$$\frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}$$

Egyenletrendezés után a következőt kapjuk:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Ugyanez elvégezhető a háromszög többi oldalpárjára is. □

Euler egyenes

Tétel. *Bármely (nem szabályos) háromszögben a háromszög magasságpontja, M, a súlypontja, S és a köré írt kör középpontja, O egy egyenesbe esik, mégpedig úgy, hogy a súlypont a másik kettő távolságát harmadolja és a köré írt kör középpontjához van közelebb. (Szabályos háromszög esetén a három pont természetesen egybe esik.)*

Bizonyítás. Legyen az ABC egy nem szabályos háromszög. Legyen a háromszög körülírt körének középpontja O, súlypontja S. Ezek meghatároznak egy egyenest. Adjuk meg A, B és C pontok helyét az O-ból indított vektorokkal:

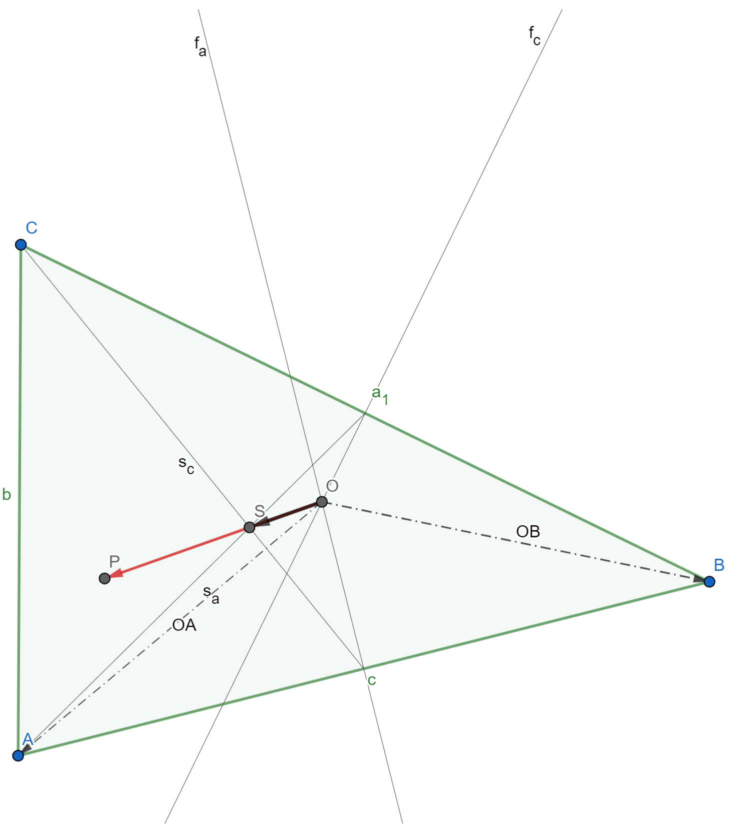
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

Ekkor a háromszög súlypontjába mutató vektor:

$$\vec{s} = \overrightarrow{OS} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}.$$

Legyen P pont az ábrán látható módon olyan, hogy $\vec{p}$ vektor az $\vec{s}$ vektor háromszorosa legyen:

$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = 3 \cdot \vec{s} = 3 \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$



Elegendő belátni, hogy P a háromszög magasságpontja, hisz ekkor igazoltuk az állítást (M, S és O egy egyenesbe esik, és S az MO O-hoz közelebbi harmadolópontja). Ehhez azt kell igazolni, hogy $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{AB}$ mert akkor hasonló módon igazolható lenne, hogy $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{AC}$.

Ha $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{AB}$ akkor e két vektor skaláris szorzata 0 kell legyen. Tekintsük ezt a skaláris szorzatot.
$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB} = (\vec{c} - \vec{p}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = (\vec{c} - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = (\vec{c} - \vec{a} - \vec{b} - \vec{c})(\vec{b} - \vec{a}) = (-\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

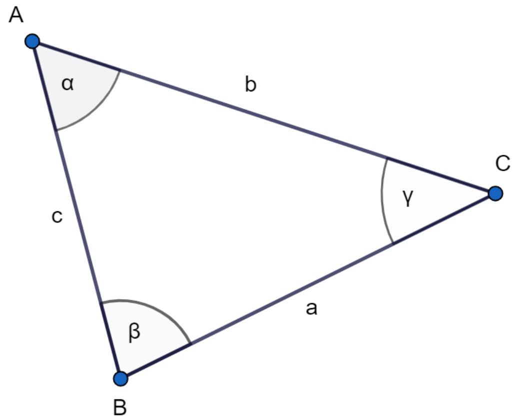
Tudjuk, hogy $\vec{a}^2 = |a|^2 = R^2$ és $\vec{b}^2 = |b|^2 = R^2$ tehát $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = R^2 - R^2 = 0$.

Tehát $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{AB}$, és hasonlóan belátható $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{AC}$-re, vagyis P pont csakugyan a háromszög magasságpontja.

$\square$

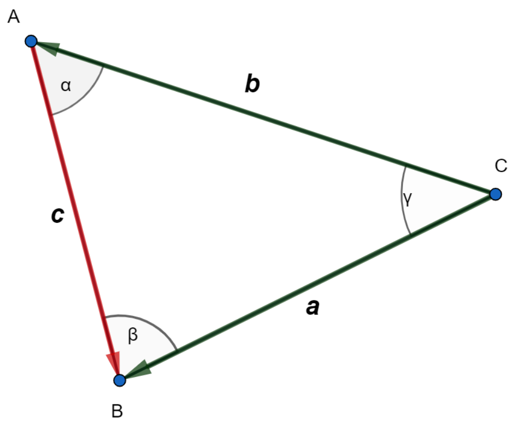
Koszinusz tétel

Tétel. *Bármely háromszögben az egyik oldal négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk e két oldal és az általuk közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát. Az alábbi ábra jelölései szerint:* $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



Bizonyítás. Irányítsuk a háromszög oldalait az ábrán jelölt módon. Ekkor az a oldal $\vec{a}$ vektor, b oldal $\vec{b}$ vektor, c oldal $\vec{c}$ vektor. Itt az $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok abszolút értéke a háromszög megfelelő oldalainak hosszával egyenlő. A $\vec{c}$ az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbsége.

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$



Emeljük négyzetre (azaz $\vec{c}$ vektort szorozzuk önmagával skalárisan):

$\vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$

Felhasználva, hogy a skaláris szorzásnál is érvényes a disztributív tulajdonság:

$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$

A skaláris szorzás definíciójából következik, hogy minden vektor önmagával vett skaláris szorzata egyenlő a vektor hosszának a négyzetével: $\vec{c}^2 = c^2, \vec{a}^2 = a^2, \vec{b}^2 = b^2$

Ugyancsak a skaláris szorzás definíciója szerint: $\vec{ab} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos\gamma$

Így megkaptuk az állítást: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

A tétel és a bizonyítás a háromszög bármelyik oldalára igaz.

□