Gyökvonás azonosságai

Definíció. *Egy pozitív valós szám n-edik, páros kitevőjű gyöke az a pozitív valós szám, amelynek a n-edik hatványa az eredeti szám. Egy valós szám n-edik, páratlan kitevőjű gyöke az a valós szám, amelynek a n-edik hatványa az eredeti szám.*

Tétel. *Az n-edik gyökvonás azonosságai.*

1. Szorzat n-edik gyöke megegyezik a tényezők n-edik gyökének szorzatával. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2. Egy tört n-edik gyöke egyenlő a számláló és a nevező n-edik gyökének hányadosával. $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$*, ahol* $(b \neq 0)$.

3. A gyökvonás és a hatványozás felcserélhetőek. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$*, ahol k egész,*

4. Többszörös gyökvonás esetén a gyökkitevők szorzatával képzett gyökkitevővel vonunk gyököt. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$*, ahol m egész és* $m \geq 2$

5. A gyökkitevő és hatványkitevő bővíthető és egyszerűsíthető. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$

Bizonyítás. 1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ Emeljük n-edik hatványra mindkét oldalt. Ekkor a bal oldal $(\sqrt[n]{a \cdot b})^n = a \cdot b$, a jobb oldal pedig $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$, a hatványozás azonosságai és az n-edik gyök definíciója alapján.

2. $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Emeljük n-edik hatványra mindkét oldalt. A bal oldalra ekkor: $\left(\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)}\right)^n = \frac{a}{b}$. A jobb oldalra pedig, $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$.

3. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$ Emeljük n-edik hatványra mindkét oldalt. Az állítás bal oldala: $\left((\sqrt[n]{a})^k\right)^n = a^k$. A jobb oldal: $\left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n = a^k$.

4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$. Emeljük n-edik, majd m-edik hatványra az állítás mindkét oldalát! A bal oldal: $((\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^n)m = (\sqrt[m]{a})^m = a$. A jobb oldal: $\left((\sqrt[nm]{a})^n\right)^m = (\sqrt[nm]{a})^{nm} = a$.

5. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ Emeljük n-edik hatványra a bal és jobb oldalt. Bal oldal: $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$. Jobb oldal: $(\sqrt[nk]{a^{nk}})^n = \sqrt[k]{a^{mk}} = a^m$.

□

Vieté formulák

Tétel. *Ha az* $ax^2 + bx + c = 0$, $(a, b, c, x \in \mathbb{R}$ *és* $a \neq 0)$ *egyismeretlenes másodfokú egyenletnek van megoldása a valós számok halmazán és valós gyökei* x_1 *és* x_2*, akkor* $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ *és* $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Bizonyítás. A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:
A két gyök összege:

$$x_1+x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})+(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a} = \\ = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

A két gyök szorzata:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a \cdot 2a} = \\ = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

□

Példa. Tekintsük az $x^2 - 2x - 15$ másodfokú egyenletet, melynek gyükei x_1 és x_2. A fenti tétel állítása szerint $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2}{1} = 2$ és $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-15}{1} = 15$.
Melyik az a két szám, amelyre ez teljesül? $x_1 = -3$ és $x_2 = 5$

Számtani és mértani közép közti összefüggés

Tétel. *Két (nemnegatív) szám mértani közepe nem nagyobb, mint ugyanezen két szám számtani közepe. Azaz a, b nemnegatív számokra,* $\sqrt{a \cdot b} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

A két bizonyítás közül elegendő az egyiket megtanulni.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $0 \leq (a-b)^2$ mindig igaz.

Bontsuk fel a zárójelet.

$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$

Adjunk mindkét oldalhoz $4ab$-t.

$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$

A jobb oldalon ismét egy teljes négyzet áll. Ezért:

$4ab \leq (a+b)^2$

Osszunk le 4-gyel.

$a \cdot b \leq \dfrac{(a+b)^2}{4}$.

Mivel a és b pozitív mindkét oldalon pozitív szám all, ezért gyököt vonhatunk. Így kapjuk:

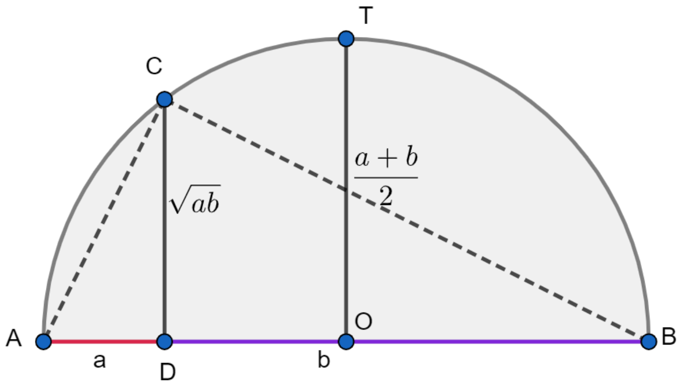
$\sqrt{a \cdot b} \leq \dfrac{a+b}{2}$. Ami a bizonyítandó állítás volt.

Az egyenlőség akkor következik be, ha a két szám egyenlő. □

(Miért pont a $0 \leq (a-b)^2$-ből indultunk ki? Az okoskodás fordított iránya:

$a \cdot b \leq \dfrac{(a+b)^2}{4}$. Felszorzás és a zárójel felbontása után. $4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$ Nullára rendezve. $0 \leq a^2 - 2ab + b^2$ Vegyük észre, hogy a jobb oldal egy teljes négyzetet kaptunk. $0 \leq (a-b)^2$, ez azonban mindig igaz. Mivel végig ekvivalens átalakításokat végeztünk ezért, a kiinduló állítás is igaz volt.)

Bizonyítás. A tételt geometria úton is bizonyíthatjuk. Legyen adott két a illetve b hosszúságú szakasz. Vegyünk fel egy $a+b = AB$ átmérőjű kört. Az a és b szakaszok D találkozási pontjában emeljünk merőlegest az AB átmérőre. Így kapjuk a C pontot.



Thalész-tétele szerint az ABC háromszög derékszögű. Ebben az AB átfogóhoz tartozó CD magasság a magasság tétel értelmében mértani közepe az AB átfogó két szeletének, az a és b hosszúságú szakaszoknak. Ez a CD szakasz pedig nem lehet nagyobb a kör sugaránál, az OT szakasznál, amely a két szakasz számtani közepével egyenlő. □

Húrnégyszögek tétele

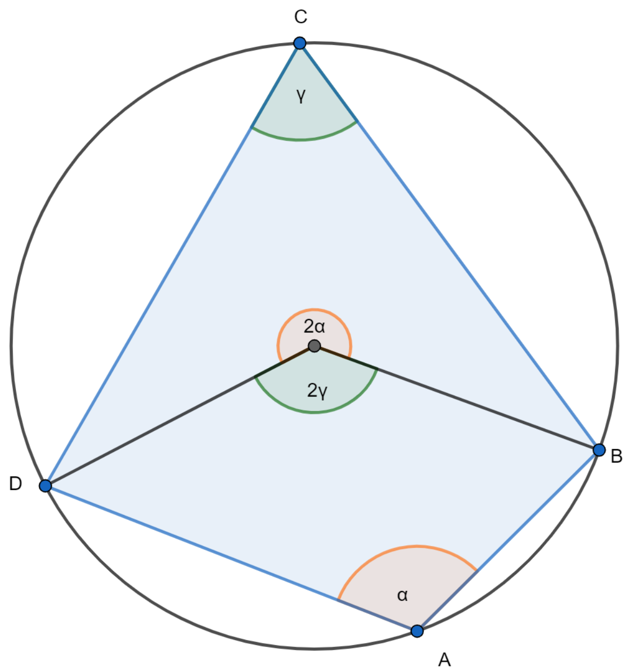
Definíció. *Azokat a konvex négyszögeket, amelynek oldalai egy kör húrjai, húrnégyszögnek nevezzük.*

Tétel. *Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege egyenlő.*

Bizonyítás. A tétel két állítást tartalmaz:
1. Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor szemközti szögeinek összege 180°.
2. Ha egy négyszög szemközti szögeinek összege 180°, akkor az a négyszög húrnégyszög.

Elsőként az első állítást bizonyítjuk.

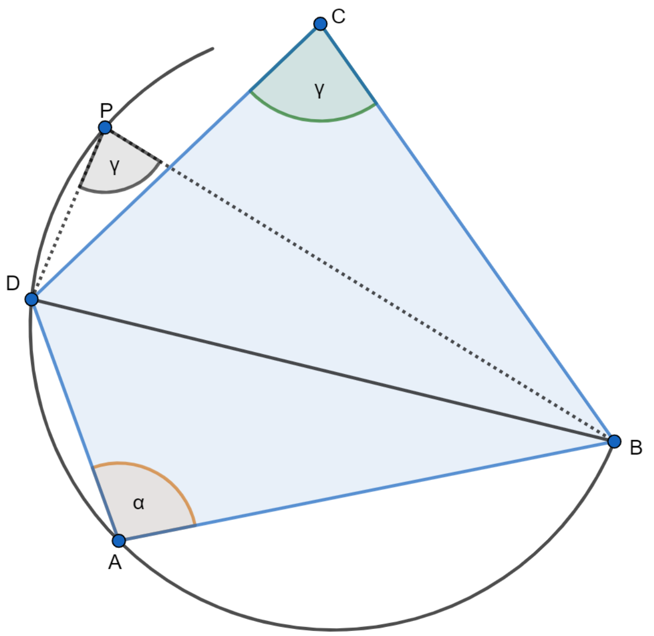
Kössük össze a négyszög két szemközti csúcsát, B-t és D-t, a kör középpontjával. A kerületi és középponti szögek tétele értelmében a BAD kerületi szöghöz (α) tartozó BOD középponti szög ennek kétszerese (2α). Ugyanígy, a BCD kerületi szöghöz (γ) tartozó BOD középponti szög ennek kétszerese (2γ)



Mivel $2\alpha + 2\gamma = 360°$, ezért $\alpha + \gamma = 180°$.

Ezután azt fogjuk bizonyítani, hogy ha egy négyszög szemközti szögeinek összege 180°, akkor az a négyszög húrnégyszög, tehát van a csúcsain átmenő kör.

Tekintsük az $ABCD$ négyszöget, amelynek szemközti szögeinek összege 180°. Vegyük a mellékelt ábrát, $\alpha + \gamma = 180°$ Kössük össze az B és D csúcsokat, azaz az α és a γ szögekkel szemközti átlót. Húzzuk meg az ABD háromszög köréírt körét. Ilyen mindig van.



Azt még nem bizonyítottuk, hogy ez átmegy-e a negyedik C csúcson. Jelöljük ki ennek a körívnek tetszőleges P pontját a B és D pontok között. (A BD átló azon oldalán, ahol a C pont van) Az $ABPD$ négyszög húrnégyszög, ezért a P csúcsnál lévő szög az α kiegészítő szöge, tehát a $BPD = \gamma$.

(Mivel az összes olyan pont, amelyből a BD átló γ szög alatt látszik, a BD átlóhoz tartozó szimmetrikus látóköríveken van, ezért a C pontnak szintén ugyanezen körívek valamelyikén kell lenni. Csak az a körív jöhet szóba, amelyik a BD átlónak az A csúccsal ellentétes oldalán van. A másik látóköríven nem lehet, mert akkor az $ABCD$ négyszög nem konvex, hanem konkáv lenne.) $\square$