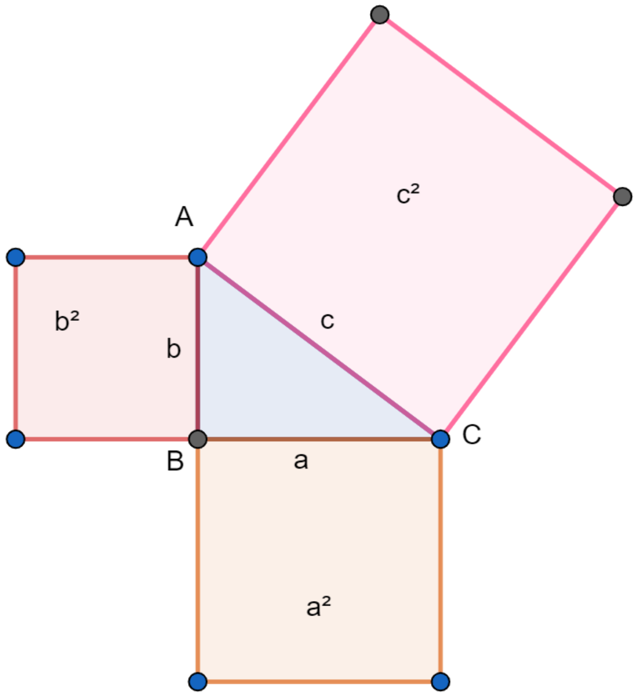
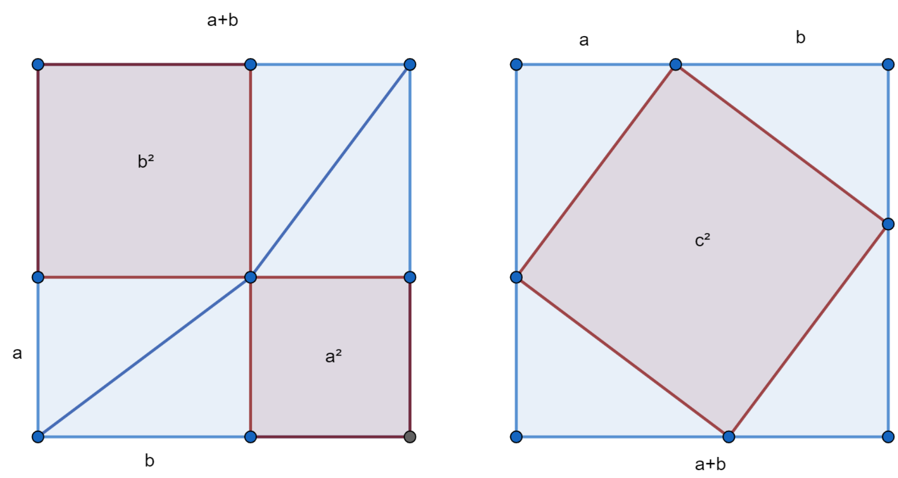
Pitagorasz-tétel

Tétel. Pitagorasz-tétel. *Ha egy háromszög derékszögű, akkor befogóinak oldalhosszainak négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével.*

Bizonyítás. Jelöljük a derékszögű háromszög oldalait a következőképpen. Ekkor a tétel alapján az $a^2 + b^2 = c^2$ egyenlőséget kell belátni.



Vegyünk két négyzetet, mindkettő oldalhossza legyen $a + b$. Ezeket bontsuk részekre az alábbi ábrán látható módon.



Azt használjuk ki, hogy egyenlő területekből azonos nagyságú területeket elvéve, a maradék területek is egyenlő nagyságúak. Ha mindkét $a + b$ oldalú négyzetből elvesszük a minden méretében azonos (csak más helyzetű) négy-négy derékszögű háromszöget, akkor a maradék területeknek is egyenlőknek kell lenniük.

Így a bal oldali $a + b$ oldalú négyzetből két kisebb négyzet marad, ezek együttes területe $a^2 + b^2$.

A jobb oldali $a + b$ oldalú négyzetből marad a középső négyszög. Ennek minden oldala c. Minden szöge 90°, mert bármelyik szögének nagyságát úgy kaphatjuk, hogy az egyenesszögből elvesszük a derékszögű háromszög két hegyesszögének összegét, azaz 90°-ot. Mivel a négyszög minden oldala egyenlő és minden szöge 90°, ezért négyzet. Területe c^2.

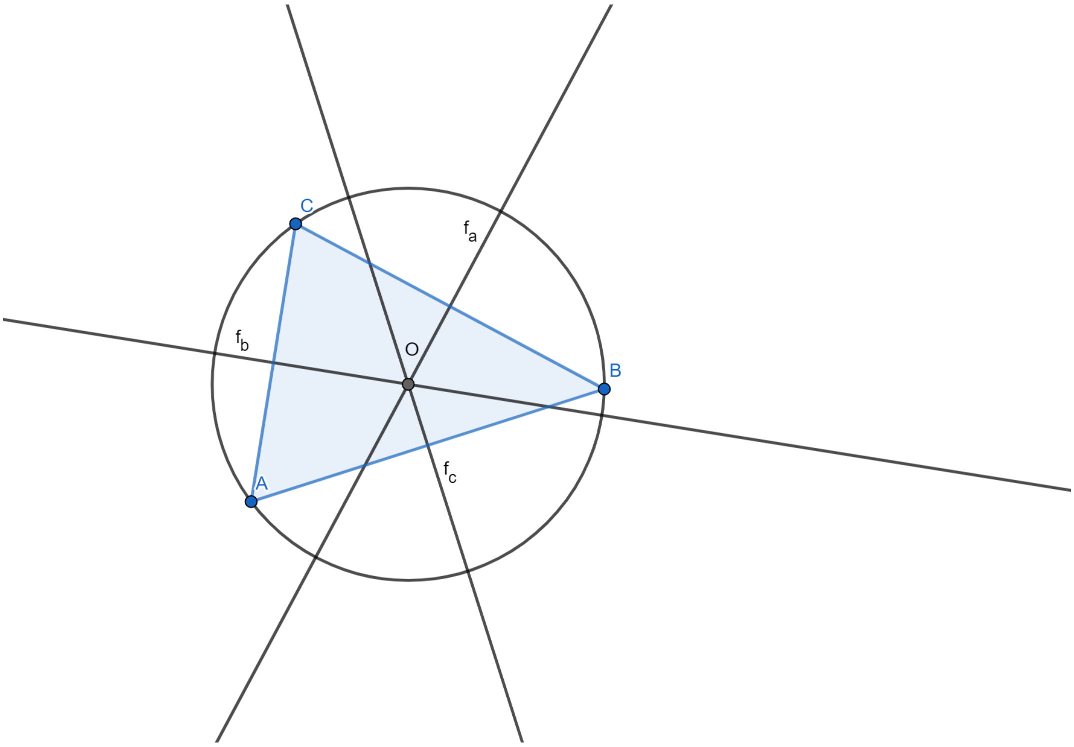
Tehát a két négyzetben a maradékterületek egyenlő nagyságúak, azaz, $a^2 + b^2 = c^2$. □

Köré írt kör középpontja

Definíció. *A háromszög oldalfelező merőlegesei, olyan egyenesek, melynek pontjai egyenlő távolságra vannak a hozzájuk tartozó oldal két végpontjától.*

Tétel. *Az ABC háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, ez a háromszög köré írható kör középpontja.*

Bizonyítás. Jelölje az oldalfelező merőlegeseket rendre f_a, f_b, f_c. Legyen O az f_a és f_b metszéspontja.



Az oldalfelező merőlegesek definíciója szerint O egyenlő távolságra van B és C csúcsoktól, mivel rajta van f_a-n. Továbbá egyenlő távolságra van C és A csúcsoktól, mivel rajta van f_b-n. Ezért O egyenlő távolságra van A és B csúcsoktól is, ezért rajta van f_c-n is.

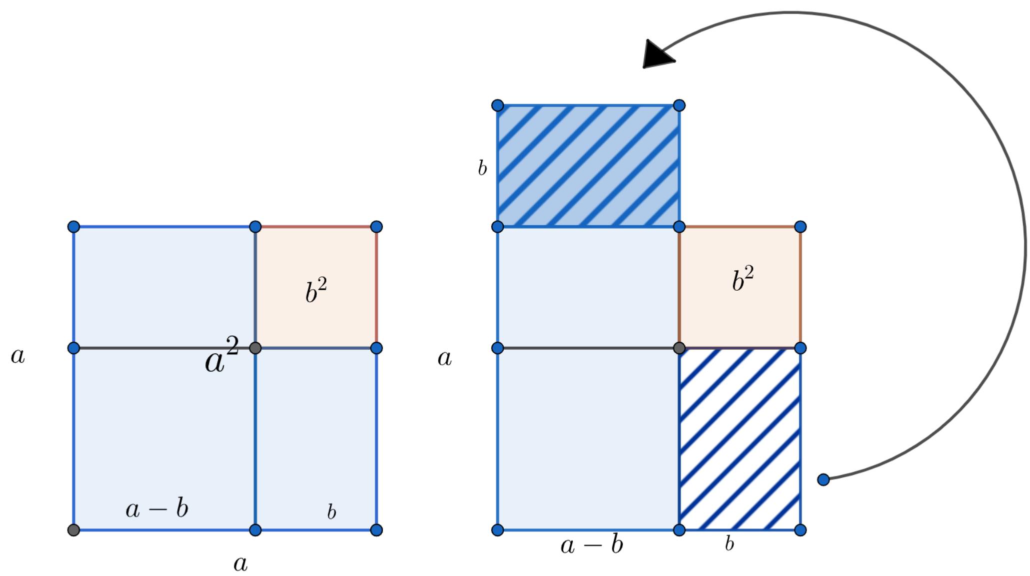
Tehát a háromszög oldalfelezői egy, az O pontban metszik egymást, és ez a pont mindhárom csúcstól egyenlő távolságra van, tehát O a háromszög köré írt kör középpontja. □

Két pozitív szám összegének és különbségének szorzata

Tétel. *Legyen a és b két pozitív szám. Ekkor* $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$, *azaz két pozitív szám összegének és különbségének szorzata egyenlő a két tag négyzetének különbségével.*

Bizonyítás. 1. Algebrai úton.
Legyen a, b pozitív számok. Ekkor $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$. □

Bizonyítás. Geometriai úton. Vegyünk fel egy a oldalú négyzetet és jelöljük rajta a b távolságot. Ekkor a négyzet területe a^2. A sárgával jelölt kisebb négyzeté pedig b^2. Ha ennek a kisebb, b oldalú négyzetnek a területét levonjuk az a oldalú négyzet területéből, akkor a kékkel jelölt alakzat területét kapjuk. Mennyi ez? Megfelelő átdarabolással kaphatjuk, hogy a kékkel jelölt alakzat területe nem más mint $(a-b)(a+b)$.



□

Kilenccel való oszthatóság feltétele

Tétel. *Egy szám osztható* 9*-cel, ha a számjegyinek összege osztható,* 9*-cel.*

Bizonyítás. Legyen az x szám számjegyeinek összege osztható 9-cel. Írjuk fel a számot helyiértékes alakban, $x = z \cdot 10^n + ... + c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$, ahol $z, ..., c, b, a$ a szám számjegyei.

Tudjuk, hogy $10 = 9 + 1, 100 = 99 + 1, 1000 = 999 + 1$ és így tovább ... Így a fenti helyiértékes felírásra:

$z \cdot (9Z + 1) + ... + c \cdot (99 + 1) + b \cdot (9 + 1) + a$

Bontsuk fel a zárójeleket.

$z \cdot 9Z + z + ... + c99 + c + b9 + b + a$

Rendezzük a kifejezést.

$\underbrace{z9Z + ... + 99c + 9b}_{\text{osztható 9-cel}} + \underbrace{z + ... + c + b + a}_{\text{számjegyek összege}}.$

Az első zárójel felett felsorolt számok oszthatóak 9-cel, hiszen oszthatóság tulajdonságaiból tudjuk, hogy ha $a|b$ és $a|c$, akkor $a|(b + c)$ és ha $a|b$, akkor $a|bd$.

A második zárójelben pedig a számjegyek összege áll. A feltétel alapján tudjuk, hogy ez osztható 9-cel. Tehát az egész szám osztható 9-cel.

□

Példák.

81 osztható 9-cel, mert számjegyei összege $8 + 1 = 9$ osztható 9-cel.

531 osztható 9-cel, mert számjegyei összege $5 + 3 + 1 = 9$ osztható 9-cel.

7425 osztható 9-cel, mert számjegyei összege $7 + 4 + 2 + 5 = 18$ osztható 9-cel.