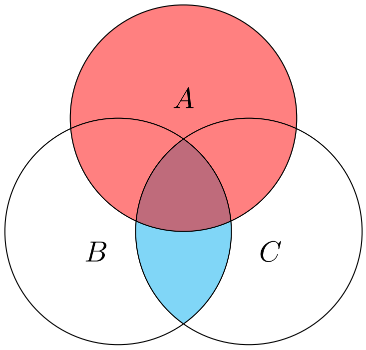
Metszet és Unió disztributivitása

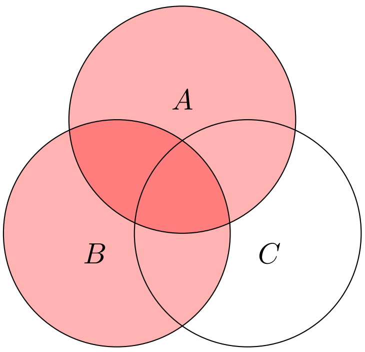
Tétel. *Halmazok uniója disztributív a halmazok metszetre nézve.*

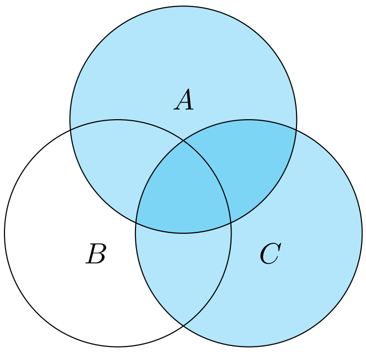
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Bizonyítás. Ábrázoljuk A, B ás C halmazokat Venn-diagrammal. Tekintsük először az $A \cup (B \cap C)$-t. Színezzük kékkel $B \cap C$-t, pirossal A halmazt. A beszínezett rész ekkor $A \cup (B \cap C)$.

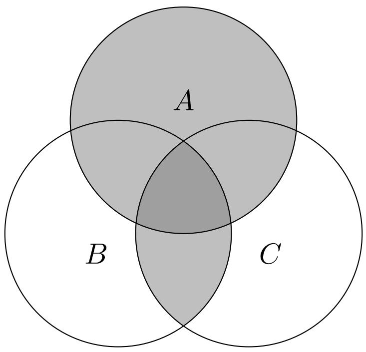


Ezután tekintsük $(A \cup B) \cap (A \cup C)$-t. Színezzük először pirosra $(A \cup B)$-t. Majd kékre $(A \cup C)$-t.





Azokat a részeket keressük, amely mindkét ábrán be van színezve. Így a következőt kapjuk:

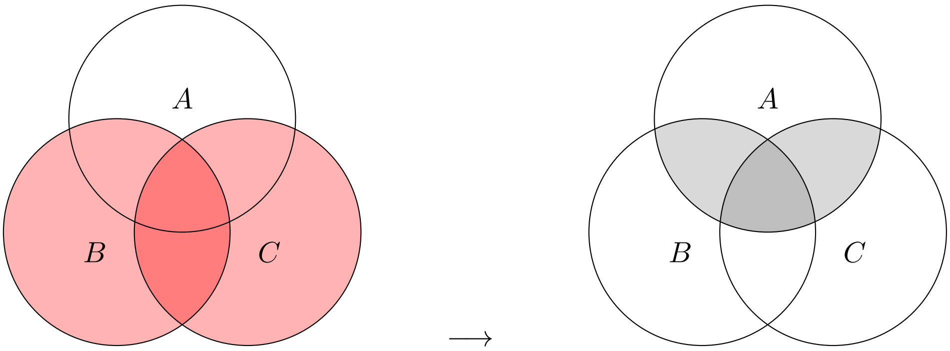


Ez az ábra pedig megegyezik az első ábrával. Tehát $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. □

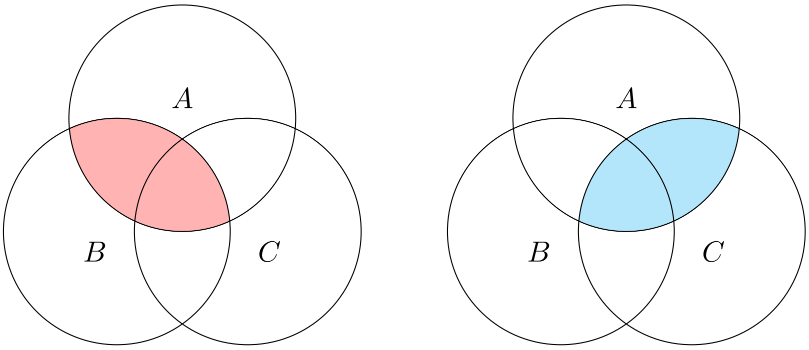
Tétel. *Halmazok metszete disztributív a halmazok uniójára nézve.*

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

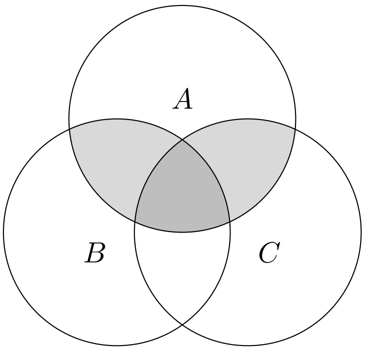
Bizonyítás. Hasonlóképpen Venn-diagramm segítségével. Tekintsük először $A \cap (B \cup C)$-t. Színezzük pirosra $B \cup C$-t. Majd vegyük a metszetét A-val. A szürkére színezett rész tehát így: $A \cap (B \cup C)$.



Ezután tekintsük $(A \cap B) \cup (A \cap C)$-t. Színezzük pirosra $(A \cap B)$-t, és kékre $(A \cap C)$-t.



Ennek a kettőnek pedig vegyük az unióját. Azaz a színezett részeket. Ez pedig a következő:



□

Hatványozás azonosságai

Definíció. *Legyen a egy természetes szám, n pedig legyen pozitív egész szám. Ekkor az a n-dik hatványának nevezzük azt az n tényezős szorzatot, melynek minden tényezője a.*

Jele: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n db tényező).

Ekkor az a-t a hatvány alapjának, az n-et pedig kitevőnek nevezzük.

Tétel. *Hatványozás azonosságai.*

1. Egy szorzat tényezőnként hatványozható. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

2. Egy tört hatványozható úgy, hogy külön hatványozzuk a számlálót és külön a nevezőt. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

3. Egy hatvány hatványozható úgy, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük. $(a^n)^k = a^{nk}$.

4. Azonos alapú hatványokat úgy szorozhatunk, hogy a közös alapot a kitevők összegére emeljük. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

5. Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy a közös alapot a kitevők különbségére emeljük. Ha $n > m$, akkor $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Bizonyítás. 1. $(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b)(a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{\text{n-szer}}$ Mivel a szorzás kommutatív és asszociatív ezért a szorzatot átrendezhetjük: $(a{\cdot}b)(a{\cdot}b)\cdot\ldots\cdot(a{\cdot}b) = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a)}_{\text{n-szer}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{\text{n-szer}}$. A hatványozás definíció szerint ez egyenlő $a^n \cdot b^n$-vel.

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} \cdot$ A törtekre vonatkozó szorzás és a szorzás asszociatív tulajdonsága szerint: $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} \cdot = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}$ A számlálóban és a nevezőben is egy n tagú szorzat áll, ezért ez egyenlő $\frac{a^n}{b^n}$-el.

3. $(a^n)^k = \underbrace{(a^n) \cdot (a^n) \cdot (a^n) \cdot \ldots \cdot (a^n)}_{\text{k-szor}}$. Ezután mindegyik tényezőt szorzat alakba írva: $(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a \cdot a \cdot a)$ a szorzatban éppen $n \cdot k$-szor szerepel az a, ezért a hatványozás definíciója alapján ez egyenlő a^{nk}-val.

4. $a^n \cdot a^m$-ban írjuk szorzat alakba a tényezőket. $\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{\text{n-szer}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{\text{m-szer}}$ Így éppen $n+m$-szer szerepel az a tényező, így a hatványozás definíciója szerint ez egyenlő a^{n+m}-el.

5. Legyen $n > m$. $\frac{a^n}{a^m}$ esetében írjuk szorzat alapka a számlátót és a nevezőt is. $\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}$ Ekkor egyszerűsítés után $n - m$ számú tényező marad, ez a hatványozás definíciója szerint pedig a^{n-m}-el egyenlő. □

Köbös nevezetes szorzatok

Tétel. *Két valós szám összegének illetve különbségének harmadik hatványa:*

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ *illetve*

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Bizonyítás. Végezzük el a beszorzást mindkét esetben.

$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = (a-b)\cdot(a-b)\cdot(a-b) = (a^2-2ab+b^2)\cdot(a-b) = a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ □

Tétel. *Két szám köbének összege és különbsége:*

1. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

2. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Bizonyítás. 1. Végezzük egy a beszorzást a jobb oldalon.

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$.

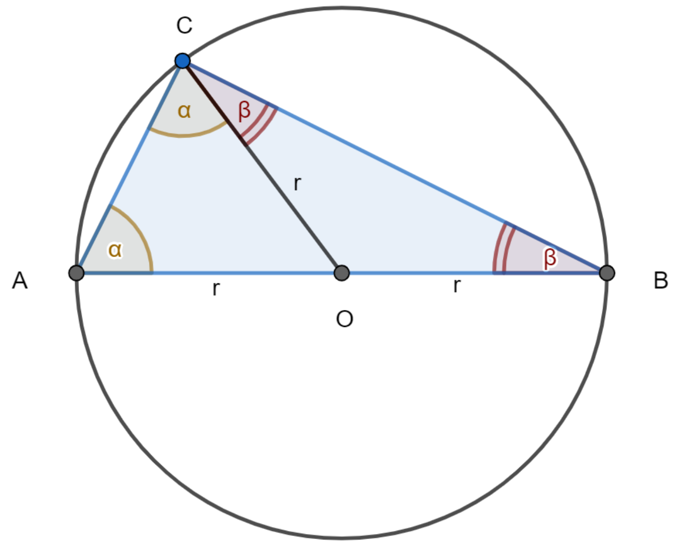
2. Szintén.

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$. □

Thálesz-tétel

Tétel. *Ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk.*

Bizonyítás. Kössük össze a kör AB átmérőjének két végpontját a körvonal egy tetszőleges C pontjával. Így egy ABC háromszöget kaptunk. Legyen az A csúcsnál lévő szög $CAB = \alpha$, és az $ABC = \beta$. A C pontot most kössük össze a kör O középpontjával. Az OC szakasz két háromszögre bontja az eredeti háromszöget.



Mindkét háromszög egyenlőszárú, hiszen $AO = OC = OB = r$ (a kör sugara) Ebből következik, hogy $ACO = CAB = \alpha$ és $BCO = ABC = \beta$. Az ABC háromszög belső szögeinek összege: $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$

$2 \cdot (\alpha + \beta) = 180°$ Tehát,

$(\alpha + \beta) = 90°$

Ezzel beláttuk, hogy az ABC háromszögben a C csúcsnál derékszög van. □