Néggyel való oszthatóság feltétele

Tétel. *Egy szám osztható 4-gyel, ha utolsó két számjegyével alkotott szám osztható 4-gyel.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy x számra teljesül, hogy az utolsó két számjegyével alkotott szám osztható 4-gyel.

Minden szám felírható $x = 100j + k$ alakban, ahol k egy egyjegyű vagy kétjegyű szám (tehát az eredeti szám utolsó két jegyéből alkotott szám).

Például, $1312 = 13 \cdot 100 + 12$ vagy $564 = 5 \cdot 100 + 64$.

Az oszthatóság tulajdonságaiból tudjuk, hogy ha egy a szám oszt egy másik b számot és a szám c számot is osztja, akkor az összegüket, $b + c$-t is osztja. És ha egy a szám osztója b-nak, akkor b minden többszörösének is osztója.

Tekintsük az adott számunkat, a fenti felírásban. A 4 osztja a 100-at és annak minden többszörösét, mert $100 = 4 \cdot 25$. A feltétel szerint teljesül, hogy 4 osztja az utolsó két számjegyből alkotott számot, azaz k-t. Így tehát beláthatjuk a számra:

$x = \underbrace{100j}_{\text{4-gyel osztható}} + \underbrace{k}_{\text{4-gyel osztható}}$ tehát a négy osztója az x számnak.

Példák.

432 osztható 4-gyel, mert 32 osztható 4-gyel.

1024 osztható 4-gyel mert 24 osztható 4-gyel.

48 osztható 4-gyel mert, utolsó két számjegyéből alkotott szám, azaz a 48 osztható 4-gyel, $48 = 12 \cdot 4$.

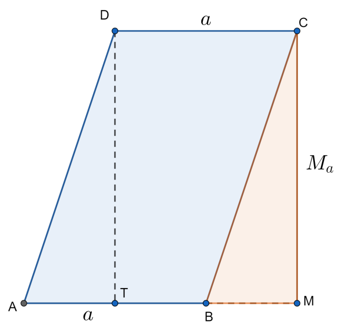
$\square$

Paralelogramma területe

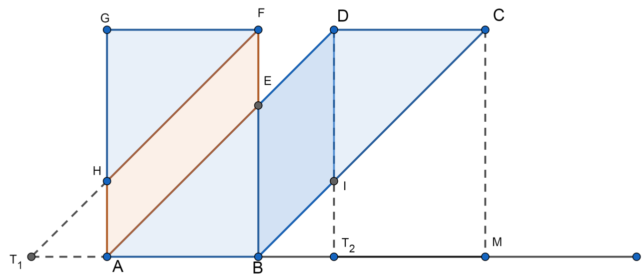
Tétel. *Minden paralelogramma területe egyenlő az alapja és magassága hosszának szorzatával.*

Bizonyítás. A paralelogrammából átdarabolással egy vele azonos területű téglalapot készítünk, amelynek egyik oldala a, a paralelogramma oldala, a másik oldala a paralelogrammának az a oldalhoz tartozó magassága: m_a.

Az átdarabolást elvégezhetjük, mert ATD háromszög egybevágó BMC háromszöggel. Hiszen egy oldaluk és két szögük egyenlő nagyságú.



Az átdarabolás kevésbé "kedvező" esetben is elvégezhető. Erre ad példát az alábbi ábra.



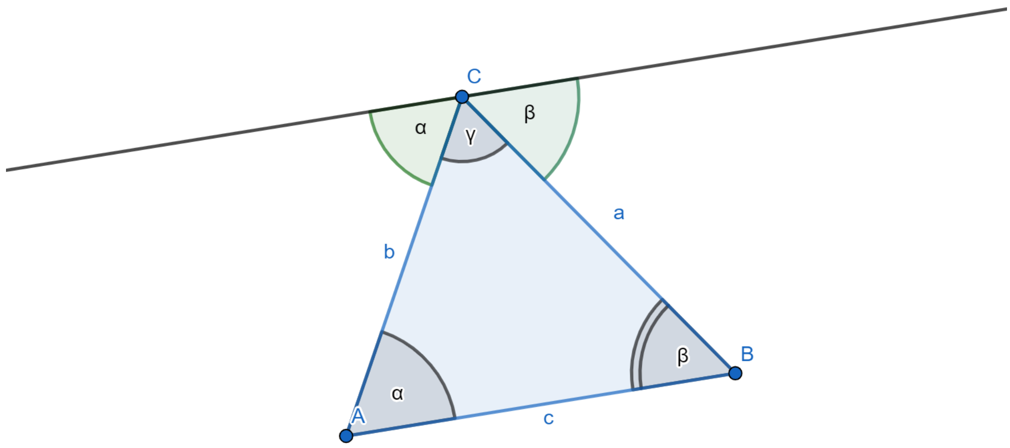
Ekkor az $ABCD$ paralelogramma átdarabolható, az $ABFG$ téglalapba. Kezdjük az átdarabolást, az ICD háromszöggel, mely egybevágó HFG háromszöggel, ezek területe természetesen egyenlő. Ezután már csak azt kell belátnunk, hogy a pirossal színezett $AEFH$ alakzat területe egyezik $BIDE$ alakzatéval. Ehhez tekintsük a T_1BF és AT_2D háromszögeket, melyek egybevágóak. Vegyük el mindkét háromszögből az ABE háromszöget. A továbbiakban T_1AH és BT_2I háromszögeket vizsgáljuk. Ezek szintén egybevágóak, hiszen szögeik és egy oldaluk azonos, tehát területük is egyenlő. Ezzel beláttuk, hogy a két háromszögben, T_1BF és AT_2D-ben a maradék területek is egyenlőek.

A téglalap, és így a paralelogramma területe: $T = a \cdot m_a$. □

Háromszög belső és külső szögeinek összege

Tétel. *A háromszög belső szögeinek összege* $180°$.

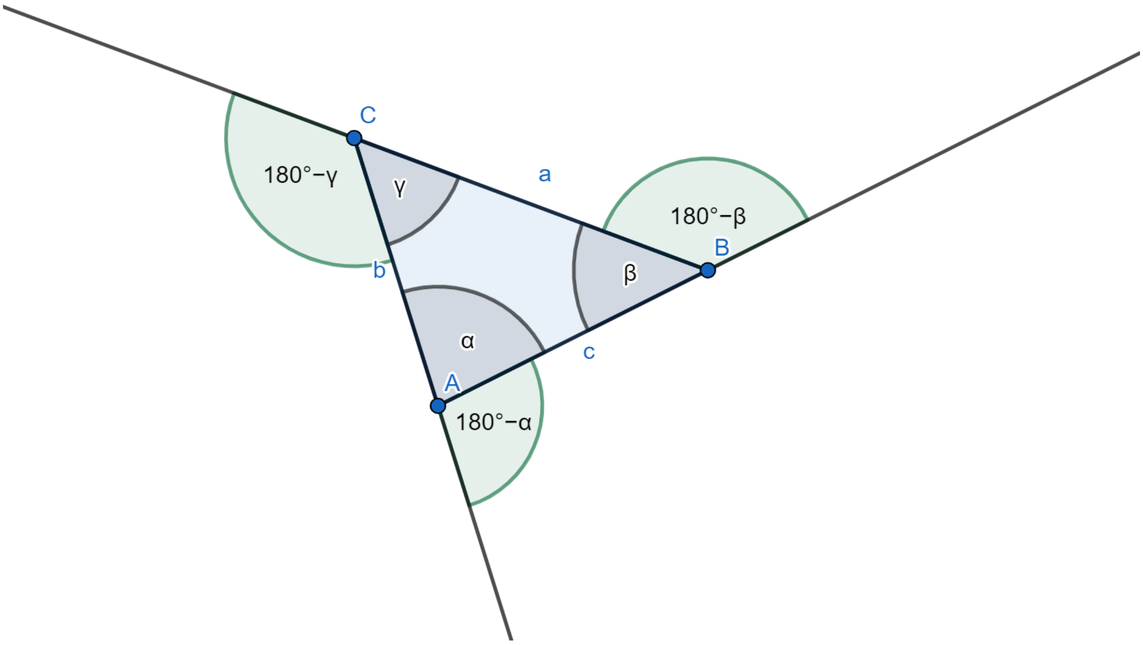
Bizonyítás. Legyenek az ABC háromszög belső szögei α, β, γ. Húzzunk a C csúcson át párhuzamost AB-vel. A C csúcsnál keletkezett egyenesszöget a háromszög oldalai három szögre bontják.



Az egyik az A csúcsnál, a másik a B csúcsnál lévő szög váltószöge, a középső pedig a γ. Így a C csúcsnál lévő egyenesszög egyenlő a háromszög belső szögeinek összegével: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ □

Tétel. *A háromszög külső szögeinek összege* 360°.

Bizonyítás. Legyenek az ABC háromszög belső szögei α, β, γ. A háromszög külső szögeit az oldalegyenese meghosszabbításával kapjuk. A külső és belső szög egy egyenesen fekszik, tehát együtt egyenesszöget alkotnak, összegük 180°. Jelölje az α-nál fekvő külső szöget α', β-nál fekvőt β', γ-nál pedig γ'.



Ekkor $\alpha' = 180° - \alpha$ $\beta' = 180° - \beta$ $\gamma' = 180° - \gamma$.

Adjuk össze a külső szögeket.

$$\alpha'+\beta'+\gamma' = (180°-\alpha)+(180°-\beta)+(180°-\gamma) = 3\cdot180°-\alpha-\beta-\gamma = 3\cdot180°-\underbrace{(\alpha+\beta+\gamma)}_{180°} =$$

$$2 \cdot 180° = 360°$$

Mivel a háromszög belső szögeinek összege 180°. □

Hatványműveletek

Definíció. *Legyen a egy természetes szám, n pedig legyen pozitív egész szám. Ekkor az a n-ik hatványának nevezzük azt az n tényezős szorzatot, melynek minden tényezője a.*

Jele: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n db tényező).

Ekkor az a-t a hatvány alapjának, az n-et pedig kitevőnek nevezzük.

Tétel. Hatvány-műveletek.
1. Azonos alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy a közös alapot a kitevők összegére emeljük.

Pl.: $2^5 \cdot 2^{13} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 ... 2 \cdot 2 \cdot}_{5\ db} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 ... 2 \cdot 2 \cdot}_{13\ db} = 2^{5+13} = 2^{18}$; $3^{21} \cdot 3^6 \cdot 3^5 = 3^{32}$.

2. Azonos alapú hatványokat úgy osztunk, hogy a közös alapot a kitevők különbségére emeljük, mégpedig a számláló kitevője mínusz a nevező kitevője.

Pl.: $\dfrac{2^{14}}{2^5} = \dfrac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 ... 2 \cdot 2 \cdot}^{15\ db}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot}_{5\ db}} = 2^{14-5} = 2^9;\ \dfrac{5^8}{5^2} = 5^6.$

3. Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

Pl.: $(7^6)^4 = \underbrace{\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot}_{6\ db} \cdot ... \cdot \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot}_{6\ db}}_{4\ db} = 7^{6 \cdot 4} = 7^{24};\ (5^3 \cdot 9^2)^4 = 5^{12} \cdot 9^8$

4. Azonos kitevőjű hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.

Pl.: $2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = (2 \cdot 3)(2 \cdot 3) = 6 \cdot 6 = 6^2$

5. Azonos kitevőjű hatványokat úgy oszthatunk, hogy az alapok hányadosát a közös kitevőre emeljük.

Pl.: $\dfrac{6^3}{3^3} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 6}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \left(\dfrac{6}{3}\right)^3 = 2^3 = 8$